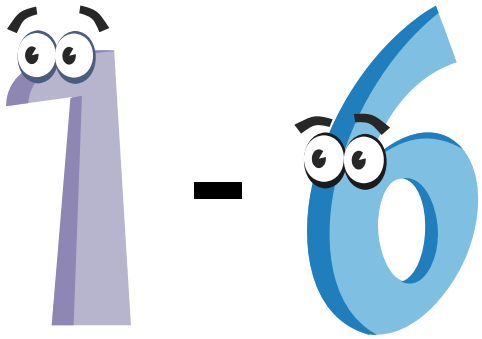
Antes de empezar

¿Sabes el resultado de esta resta?



Aunque resulte extraño costó muchos años admitir que se podía realizar.

Parece que chinos e hindúes utilizaban cantidades negativas desde el siglo V. Pero no fueron admitidos en Occidente hasta muchos siglos más tarde.

¿Sabes cómo llamaban a los números negativos?

Números ficticios, absurdos, raíces falsas y números deudos.

Algún matemático llegó incluso a decir que no deberían haber sido admitidos y que deberían eliminarse.



¡SOS! estoy en números rojos

Esta chica ha visto su cartilla de ahorros

17-09-08	Ingreso en efectivo	300	+1930
18-09-08	Cajero automático	-200	+1730
19-09-08	Recibo mueble	-1500	+230
20-09-08	Recibo sofá	-1000	-770

El saldo es lo que se tiene en cada momento. Con cada ingreso (meter dinero) el banco suma. Con cada cargo (gasto) el banco nos resta esa cantidad. Los gastos son números negativos.

El día 20 de octubre esta chica **ha gastado más dinero del que tenía**. **Está en números rojos** , es decir **debe dinero al banco**.



Debe devolver ese dinero y además le van a cobrar una importante cantidad de dinero por ello

Pueden incluirla en una lista de morosos que puede darle muchos problemas más adelante

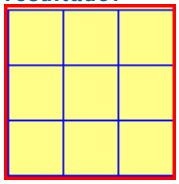
Cuadrados mágicos



(fragmento extraído de wikipedia)

En la antigua China ya se conocían los cuadrados mágicos desde el III milenio a. C., como atestigua el **Lo Shu**. Según la leyenda, un día se produjo el desborda miento de un río; la gente, intentó hacer una ofrenda al dios del río Lo para calmar su ira. El Dios no aceptaba la ofrenda y siempre aparecía una tortuga, hasta que un chico se dio cuenta de las marcas del caparazón de la tortuga, así pudieron incluir en su ofrenda la cantidad pedida (15), quedando el dios satisfecho y volviendo las aguas a su cauce.
En Occidente llegaron mucho más tarde, en el siglo XIV. ***Durante los dos siglos siguientes se llevaban grabados en una chapa como amuletos, pues se les atribuía poderes mágicos.***

¿Sabrías colocar los números del 1 al 9 en este recuadro de forma que la suma de todas las filas, diagonales y columnas dé siempre el mismo resultado?





1. Los números enteros

Introducción

En la vida real hay situaciones en las que los números naturales no son suficientes.

Por ejemplo: si tienes 10 euros y debes 15 euros ¿De cuánto dispones?. Observa a la derecha distintas situaciones en las que se necesitan números enteros.

Los números **enteros son una ampliación de los naturales:**

- Los naturales se consideran enteros positivos (se escriben con el signo +)
- Los enteros negativos van precedidos del signo -.
- El cero es un entero pero no es ni negativo ni positivo.



Debe 113 ∈
Se escribe **-113**



Tiene 113 ∈
Se escribe **+113**



El buzo está a 15 m de profundidad

Se escribe **-15 m**



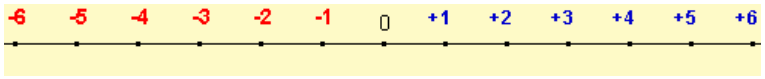
El globo está a 20 m de altura.

Se escribe **+15 m**

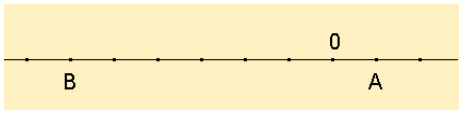
La recta numérica

Los números enteros pueden ordenarse de menor a mayor en la recta numérica.

Debemos trazar una recta y pintar el cero en el centro
Dividir la recta en segmentos iguales
Colocar los nº positivos a partir del cero a la derecha.
y los nº negativos a partir del cero a la izquierda.



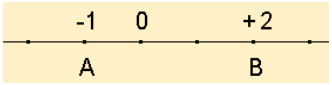
¿ Cuál es el valor de A y de B ?



El valor de A = +1
El valor de B = - 6

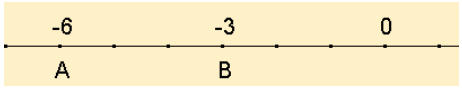
Ordenar y comparar números enteros

Cuanto más a la derecha esté un número situado en la recta numérica mayor es.
Cuanto más a la izquierda esté situado menor es.



-1 está más a la izquierda que +2
por tanto –1 es menor que +2.
Se escribe –1 < +2

¿Cuál es menor? ¿Cuál es mayor?



-6 está a la izquierda de -3 ⇒
-6 es menor que –3.

Se escribe –6<-3

Valor absoluto

¿A qué distancia se encuentra –3 y cero?
¿A qué distancia se encuentra +7 de cero?

El valor absoluto de un número entero es **la distancia que le separa del cero.**
Se escribe entre dos barras | | y es el número sin su signo:

|+a| = a |-a| = a

|+4|=4



La distancia de +4 a cero es 4.
El valor absoluto de +4 es 4.

|-3|=3



La distancia de -3 a cero es 3.
El valor absoluto de -3 es 3.

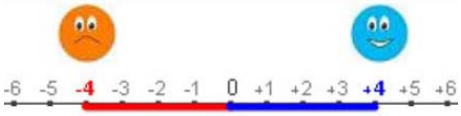
El valor absoluto es una distancia por lo que no puede ser negativo.

Opuesto de un número entero

Lo contrario de deber es tener.
Lo contrario de 4º C es 4º bajo cero.
Lo contrario de 5 m de altura es 5 m bajo el nivel del mar etc.

El opuesto de un número entero **es su simétrico respecto del cero.**
Se escribe así: Op(+a) = -a
Op(-a) = +a

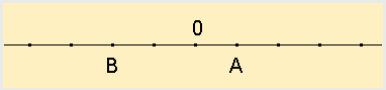
Si hablamos de dinero ¿cómo están relacionadas las cantidades +4 y –4?

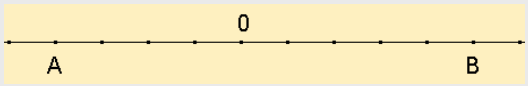


-4 y +4 son opuestos.
Se escribe op(+4)=-4
ó op(-4) = +4
+4 y –4 son simétricos respecto del cero

EJERCICIOS resueltos

1. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:
   a) Bajamos al sótano 3
   b) Nació en el año 234 antes de Cristo
   c) El avión vuela a 2455 m de altura
   d) El termómetro marcaba 5º C bajo cero

2. ¿Cuál es el valor de A y de B?
   a)
   

   b)
   

3. Escribe el signo < o > según convenga:
   a) –2 -6 b) –2 +4 c) +5 +12 d) +4 -8

4. Ordena de menor a mayor
   a) +6, -5, -10, +12 b) +4, -20, -7, -4

5. Completa adecuadamente
   a) |-5| = b) |+7| = c) op(+6)= d) op(-4)=

Soluciones:

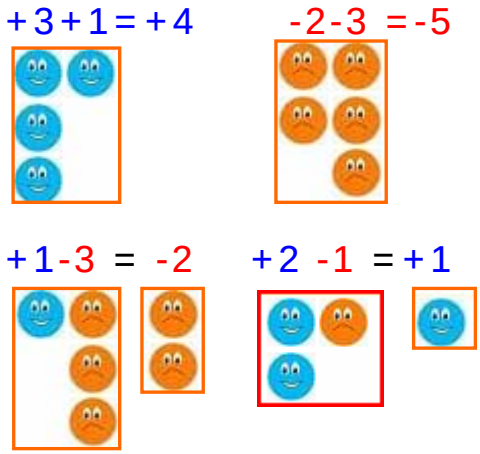
1. a) –3 b) –234 c) +2455 d) –5
2. a) A=+1 B= -2 b) A=-4 B=+5
3. a) –2 > -6 b) –2 < +4 c) +5 < +12 d) +4>-8
4. a) –10<-5<+6<+12 b) –20<-7<-4<+4
5. a) +5 b) –7 c) –6 d) +4

2. Suma y diferencia de enteros

Suma de dos enteros

¿Qué significan las siguientes expresiones?

- **+6 +3 = +9**
  tienes 6 € y te dan 3 € => **tienes 9** €.
- **-7 -5 = -12**
  debes 7 € y gastas 5 € => acumulas una **deuda de 12** €
- **-6 +8 = +2**
  tienes 8 € pero debes 6 € => **tienes 2 €.**
  El dinero supera las deudas
- **-5 +3 = -2**
  debes 5 € y tienes 3 € => **debes 2 €.**
  Las deudas superan el dinero.



Suma de tres o más enteros

Para sumar 3 ó más enteros tenemos dos métodos:

1) Agrupar los dos primeros sumandos y sumar al resultado el tercer sumando

+6 -4 +3 = -2 +3 = +1

En el caso de 4 sumandos se puede agrupar de dos en dos:

+6 -4 +3 -2 = +2 +1 = +3

2) Sumar los positivos por un lado (tener) y los negativos (deber) por el otro y finalmente hallar el resultado

deber tener
-7 +8 -5 = -12 +8 = -4

deber tener
+6 -4 +3 -2 = -6 +9 = +3

¿Cómo sumar –4 +1+2?

1º método: agrupando

-4 + 1 + 2 = -3+2 = -1



2º método: deber–tener

-4 + 1 + 2 = -4+3 = -1



¿Qué significan las expresiones?
+(+3) +(-3) -(+3) -(-3)
¿Debo o tengo?

+(+a) = +a -(-a) = +a
+(-a) = -a -(+a) = -a

Si los dos signos son iguales el resultado positivo
Si los dos signos son distintos el resultado es negativo

Ejemplos: +(+2) =+2 -(-2) = +2
- (+2) = -2 +(-2) = -2

Expresiones sencillas con paréntesis

El signo más (+) puede indicar suma o que el nº es positivo.
El signo menos (-) puede indicar resta o que el nº es negativo.

¿Cómo escribimos "***sumar*** al 5 el nº -6"?
No es correcto escribir 5 **+** -6 , lo correcto es 5**+**(-6)

¿Cómo escribir "***restar*** al 6 el nº -8"?
No es correcto 6 **-** -8 lo correcto es 5 **-** (-8)

No podemos escribir dos signos seguidos, debemos separarlos mediante un paréntesis

¿ Cuál es el resultado?

Eliminar paréntesis Operar

(+3) + (-5) = **+3 – 5** = -2

(-2) + (+4) = **-2 + 4** = +2

(+1) - (+7) = **+1 – 7** = -6

(+2) - (-6) = **+2 + 6** = +8

(-2) - (+6) = **-2 - 6** = -8

Suma y diferencia de enteros con paréntesis

Cuando se presenten ejercicios del tipo:

- (-5) + (-2) =
- (+3) - (-7) =

Deberemos

1º) Eliminar los paréntesis

2º) Operar adecuadamente los nº resultantes

Recuerda que : + (+a) = +a - (+a) = -a
+ (-a) = -a - (-a) = +a

Lo anterior es válido si hay tres ó más enteros, fíjate en los ejemplos .

(+2) - (+6) + (-5) = **+2 - 6 - 5** = -9

(-3) + (-5) - (-7) = **-3 – 5 + 7** = -5

(-2) – (-5) + (-3) – (-2) = **-2 +5 –3 +2** = +2

(-3) + (-4) – (-3) + (-1) = **-3 –4 +3 –1** = -5

EJERCICIOS resueltos

6. Realiza las siguientes sumas de números enteros

a) +7 +4 = b) –5 –4 = c) +8 –2 = d) –5 +9 =

7. Realiza la siguientes sumas de números enteros usando el método de agrupar

a) –4 + 5 –3 = b) +3 –5 +7 = c) –3 + 5 –8 = d) +4 – 7 –8 =

8. Realiza la siguientes sumas de números enteros usando el método de tener y deber

a) –4 + 5 –3 = b) +3 –5 +7 = c) –3 + 5 –8 = d) +4 – 7 –8 =

9. Escribe el resultado

a) + (+3) = b) – (+4)= c) – (-5)= d) + (-2) =

10. Realiza las siguientes sumas y diferencias de números enteros

a) +(+3) + (-5) =

b) –(+4) – (+6) =

c) – (-5) + (+7) =

d) -(+3) + (+1) – (-4) =

e) -(+2) - (+1) – (+5) =

f) -(+2) + (-1) + (-4) – (-5)=

g) -(+1) - (+3) - (-4) – (-5)=

Soluciones:

6) a) +7 +4 = +11 b) –5 –4 = -9
c) +8 – 2 = +6 d) –5 +9 = +4

7) a) –4+5-3 = +1-3=-2 b) 3 –5+7 = -2 +7 =+5
c) –3+5-8=+2-8=-6 d) +4-7-8 = -3-8 =-11

8) a)-4+5-3 = -7+2=-5 b) 3-5+7 =-5+10=+
c)-3+5-8 =-11+5=-6 d) +4-7-8= 4-15 =-11

9) a) +3 b) –4
c) +5 d) –2

10) a) +3-5=-2 b)-4-6=-10
c) +5+7 = +12 d) –3+1+4=+2
e)-2-1-5 = -8 f) –2-1-4+5 = -2
g) –1-3+4+5 = 5

3. Producto y división de enteros

★*Juan ahorra 6 al mes, ¿cuánto ahorrará al cabo de 4 meses?*



(+6)·(+4) =+24 € ahorrará al cabo de 4 meses.

★*Ana gasta 5 al mes. ¿Cuánto gastará al cabo de 3 meses?*



(-5)·(+3) =-15 € gastará al cabo de 3 meses.

★ *Luis gasta 7 al mes en CD. Deja de comprar durante 2 meses. ¿Cuánto ha ahorrado?*



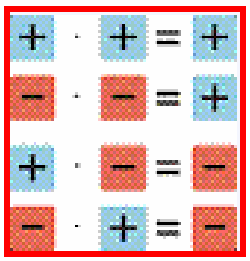
(-7)·(-2) =+14 € ahorrará al cabo de 2 meses.

Producto de enteros

Para multiplicar enteros debemos:

1º) Multiplicar los nº sin signo

2º) Aplicar la regla de los signos



Ejemplos:

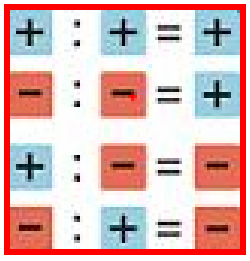
(+4)·(+3) = +12
(-2)·(-5) = +10
(+4)·(-2) = -8
(-6)·(+4) = -24

División de enteros

Para dividir enteros debemos:

1º) Dividir los nº sin signo 8 – 9

2º) Aplicar la regla de los signos



Ejemplos:

(+24):(+3) = +8
(-20):(-5) = +4
(+14):(-2) = -7
(-16):(+2) = -8

¿Qué número multiplicado por +6 da +30?

(+6)·□ =+30
(+30):(+6) =+5

(–5)·□ =+15
(+15): (–5) =–3

¿Qué número multiplicado por -5 da +15?

¿Qué número multiplicado por -7 da -21?

(–7)·□ =–21
(–21): (–7) =+3

EJERCICIOS resueltos

11. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros

a) (+4)·(+3)= b) (+5)·(-2)= c) (-4)·(-5)= d) (-3)·(+7)=

e) (+24):(+3)= f) (+15):(-3)= g) (-14):(-2)= h) (-30):(+6)=

Soluciones:

a) +12 b) –10 c) +20 d) –21 e) +8 f) –5 g) +7 h) –5

4. Potencia y raíz cuadrada

Potencias de enteros

Según se trate de un número positivo o negativo, tenemos los siguientes casos:

$(+a)^n$ $\quad 5^3 = (+5)\cdot(+5)\cdot(+5)$

$(-a)^{par}$ $\quad (-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$

$+ \qquad +$

$(-a)^{impar}$ $\quad (-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$

$+ \qquad -$

Base positiva

$(+2)^3 = (+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = +8$

$(+2)^4 = (+2)\cdot(+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = +16$

Base negativa exponente par

$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

Base negativa exponente impar

$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +16$

- El resultado de una potencia de un número positivo es positivo.
- El resultado de una potencia de un número negativo es positivo si el exponente es par y negativo si el exponente es impar.

Raíz cuadrada de un número entero

- Raíz cuadrada de un número **positivo.**

$\sqrt{16} = b \Leftrightarrow b^2 = 16$

Las posibilidades son: $4^2 = 16$ $\quad (-4)^2 = 16$

Un nº positivo tiene dos raíces cuadradas

Se escribe $\sqrt{16} = \pm 4$

- Raíz cuadrada de un número **negativo**

$\sqrt{-36} = b \Leftrightarrow b^2 = -36$

Observa que: b^2 es **positivo** $\quad -36$ es **negativo**

No es posible encontrar solución para b

No existe raíz cuadrada de un número negativo.

$\sqrt{64} = \pm 8$

$\sqrt{25} = \pm 5$

$\sqrt{-100} =$ No existe raíz

$\sqrt{-36} =$ no existe raíz

EJERCICIOS resueltos

12. Calcula las siguientes potencias y raíces cuadradas

a) $(+3)^2 =$ $\quad$ b) $(-5)^3 =$ $\quad$ c) $(-3)^4 =$ $\quad$ d) $(-3)^5 =$ $\quad$ e) $(-2)^4 =$

f) $\sqrt{-16} =$ $\quad$ g) $\sqrt{9} =$ $\quad$ h) $\sqrt{-9} =$ $\quad$ i) $\sqrt{25} =$ $\quad$ j) $\sqrt{16}$

Soluciones:

a) +9 $\quad$ b) -125 $\quad$ c) +81 $\quad$ d) –243 $\quad$ e) +16

f) no existe raíz $\quad$ g) ±3 $\quad$ h) no existe raíz $\quad$ i) ±5 $\quad$ j) ±4

Ej 1: **+3 – (+4)·(-2) =**

1.-Multiplicar +3 – (-8) =
2.-Eliminar paréntesis +3 +8 =
3.-Sumar +11

Ej 2: **+1 + (-6):(+4-7)=**

1.-Paréntesis +1 + (-6): (-3) =
2.-División +1 + (+2) =
3.-Quitar paréntesis +1+2 =
4.-Sumar +3

Ej 3: **-4 + [-3 – (-14):(+2)] =**

1.-División paréntesis -4+[-3-(-7)]=
2.-Quitar paréntesis -4 +[-3+7]=
3.-Suma paréntesis -4 + [+4] =
4.-Quitar paréntesis -4 +4=
5.-Sumar 0

5. Operaciones combinadas

Jerarquía de operaciones

Observa que hay dos tipos de paréntesis:

- Paréntesis de tipo I: en ellos hay operaciones
  Por ejemplo: 3+4-(2+3·5) =
- Paréntesis de tipo II: sirven para separar signos.
  Ejemplo: -3- (-4) + (-2) =

Los primeros deben operarse en primer lugar y los segundos deben eliminarse en el momento oportuno.

Para realizar operaciones con números enteros se ha de respetar el siguiente orden :

1ª) operar los paréntesis (tipo I)

2º) realizar las multiplicaciones y las divisiones

3º) realizar las sumas y las restas

EJERCICIOS resueltos

13. Realiza las siguientes operaciones

a) +7 + (-9)·(+5) =

b) –5 + (-6):(+6) =

c) +1-(-36):(-9-9) =

d) +1 +(+6)·(+5-6) =

e) –6 – [+3 -(-5): (+5)] =

f) +8+ [+4 +(-7)·(-9)] =

Soluciones:

a) +7 + (-45) = +7 –45 = -38
b) –5+(-1) = -5-1 = -6
c) +1-(-36) : (-18) = +1 – (+2) = +1-2 = -1
d) +1+(+6)·(-1) = +1+(-6) = +1 –6 = -5
e) –6 – [+3 – (-1)] = -6 - (+3+1) = -6-(+4) = -6 –4 = -10
f) +8+[+4+(+63)] = +8+(+4+63) = +8 +(+67) = +8 +67 = +75